224. 或ル種ノ線狀移動可能函數方程式ニ就イテ (III)

北 川 敏 男 (阪大)

7. Euler-Maclaurin ノ定理ヲ擴張スル前ニ、一應、前節ノ Bernoulli's polynomials ヲ顧ミテ置キタイ。吾々ノ目標ハ既ニ掲ゲタ。今ハソノ準備デアル。ケレドモ、目標ニ囚ハレテ途中ヲ、輕易ニ過ギルベキデモアルマイト思ハレル。

L. M. Milne-Thomson ハ Proc. London Math. Soc (2) 35, ニ於イテ、Bernoulli, Euler, Hermite 等ノ polynomials ヲ含ム ϕ-polynomials 導入ノ一方法ヲ提示シタ。

コレハ、degree ν, order n ノ ϕ-polynomials $\phi_\nu^{(n)}(\lambda)$ ヲ次ノ式ニヨッテ定義スル:

$$f(\lambda, n)e^{x\lambda+g(\lambda)} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\lambda^\nu}{\nu!}\phi_\nu^{(n)}(\lambda)$$

但シ、$f(\lambda, n)$, $g(\lambda)$ ハ x ノ或ル range ニ於イテ、右辺ガ λ ノ一樣收斂級數ニナルトイフ條件以外、全ク任意デアル。例ヘバ

$$\text{Bernoulli}: \quad f(\lambda, n) = \frac{\lambda^n}{(e^\lambda-1)^n} \qquad g(\lambda)=0$$

$$\text{Euler}: \quad f(\lambda, n) = \frac{2^n}{(e^\lambda+1)^n} \qquad g(\lambda)=0$$

$$\text{Hermite I:}\quad f(\lambda, n)=\frac{\lambda^n}{(e^\lambda-1)^n}\qquad g(\lambda)=e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

$$\text{Hermite II:}\quad f(\lambda, n)=\frac{\lambda^n}{(e^\lambda-1)^n}\qquad g(\lambda)=e^{-\frac{\lambda^2}{2}}$$

吾々ノ、コンデ問題トシヤウトスルノハ，$f(\lambda, n)$ ノトリ方デアル。

今、*linear transl. diff. Operator* $\Gamma f(x)$ ニ関シテ

$$G(\lambda)=\sum_{k=0}^{m}\lambda^k\int_{a-0}^{b+0}e^{\lambda t}d\varphi_k(t)$$

然ルトキ

$$\underbrace{\Gamma\Gamma\cdots\cdots\Gamma}_{n\text{回}} f(x)\left(\equiv\Gamma^n f(x)\text{ト置ク}\right)$$ ニ對應スル母函

數 $G_n(\lambda)$ ハ $G(\lambda)^n$ デアル：

$$\Gamma_x^n e^{x\lambda}=G_n(\lambda)e^{\lambda x}=G(\lambda)^n e^{\lambda x}$$

コレハ，容易ニ *verify* 出來ル。

茲ニ於イテ、$\Gamma f(x)$ ニ高次ノ *Bernoulli-polynomes* ヲ導入スル式ハ

$$\frac{e^{x\lambda}}{G(\lambda)^n}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^\nu B_\nu^{(n)}(x)$$

（即チ $f(\lambda,n)=\dfrac{1}{G(\lambda)^n}$）

ニ依レバヨイ。（前節ニ述ベタノハ，$n=1$ ノ場合デアル）

吾々ノ場合ハ，ϕ-polynomes ニ含マレル．ケレドモ，linear translatability ノタメ故ニ，$f(\lambda, n)$ がヤヽ明瞭ナ意味ヲモッタト云ヘヨウカ。

$$\text{Bernoulli}: \quad \Gamma f(x) = f(x+1) - f(x)$$

$$\text{Euler} \quad : \quad \Gamma f(x) = \frac{f(x+1)+f(x)}{2}$$

ナルが故ニ，是等ハ吾々ノ特別ノ場合デアル。

尚次ノコトヲ remark シテ置キタイ。

(i) 任意ノ linear translatable operator Γ ニ對シテ —— ソノ母函数ヲ $G_T(\lambda)$ トスル ——

$$\frac{T_x e^{x\lambda}}{G(\lambda)^n} = \frac{G_T(\lambda)\, e^{x\lambda}}{G(\lambda)^n} = \sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu T_x B_\nu^{(n)}(x)$$

ナルが故ニ，$T_x B_\nu^{(n)}(x)$ が簡單ニ計算サレル。

(ii) Complementary argument theorem

$$B_\nu^{(n)}(n-x) = (-1)^\nu B_\nu^{(n)}(x) \qquad \begin{matrix} (\nu = 0, 1, 2, \cdots\cdots) \\ (n = 1, 2, 3, \cdots\cdots) \end{matrix}$$

成立スルタメノ必充條件ハ

$$e^{-\lambda} G(\lambda) = G(-\lambda)$$

証明：先ヅ

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} \lambda^\nu B_\nu^{(n)}(n-x) = \frac{e^{(n-x)\lambda}}{G(\lambda)^n} = \frac{e^{-x\lambda}}{(e^{-\lambda} G(\lambda))^n}$$

今 $e^{\lambda} G(-\lambda)$ ヲバ母函數トスルヤウナ linear transl. differential operator ヲ求メテミヤウ。

$$e^{\lambda}G(-\lambda)=\sum_{k=0}^{m}(-\lambda)^{k}e^{\lambda}\int_{a-0}^{b+0}e^{-\lambda t}d\varphi_{k}(t)$$

$$=\sum_{k=0}^{m}\lambda^{k}F_{k}(\lambda)$$

但シ

$$F_{k}(\lambda)\equiv(-1)^{k}e^{\lambda}\int_{a-0}^{b+0}e^{-\lambda t}d\varphi_{k}(t)$$

ト置ク.

茲デ

$$\varphi_{k}^{*}(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{ity}-1}{y}F_{k}(-iy)\,dy$$

ト置ケバ

$$F_{k}(\lambda)=\int_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda t}d\varphi_{k}^{*}(t) \qquad (*)$$

トナル。(※)ヲ充タス有界変分函数 $\varphi_{k}^{*}(t)$ ハ essentially ニハ一意ニ決定スル。(Bochner; Vorlesungen über Fouriersche Integral, p66 satz 17 参照)

依ツテ

$$e^{\lambda}G(-\lambda)=\sum_{k=0}^{m}\lambda^{k}\int_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda t}d\varphi_{k}^{*}(t)$$

茲ニ, $\varphi_{k}^{*}(t)$ ノ積分ノ range ガ $(-\infty,\infty)$ デアリ、今マデ吾々ガ論ジテキタノハ、有限区間デアツタノト、

一見相ソハナイ。ケレドモ、コノ場合$F_k(\lambda)$ノ形カラ見ラレル如ク、取扱ヒハ今マデト同様デアリ得ル。

依ッテ與ヘラレタ $G(\lambda)$ ニ對シテ

$$G^*(\lambda)=\sum_{k=0}^{m}\lambda^k\int_{-\infty}^{\infty}e^{\lambda t}\,dg_k^*(t)$$

ヲ母函數トスル *linear transl. operator* ガ求マッタ。今

$$\frac{e^{x\lambda}}{G^*(\lambda)}=\sum_{\nu=0}^{\infty}\lambda^\nu B_\nu^{*(n)}(x)$$

ト置クト、一般ニ

$$B_\nu^{(n)}(n-x)=(-1)^\nu B_\nu^{*(n)}(x)$$

トナルコトヲ知ル。

Complementary theorem ガ成立スルタメニハ

$$B_\nu^{*(n)}(x)=B_\nu^{(n)}(x)\qquad \begin{matrix}(\nu=0,1,2,\text{-------})\\(n=1,2,3,\text{------})\end{matrix}$$

ノ成立スルコトガ必充條件デアル。

コレハ,

$$e^{-\lambda}G(\lambda)=G(-\lambda)$$

トイフ條件ト *equivalent* デアル。

8. 前節カラ次ノ諸問題ガ蜂起シテクル。筆者ニハ，何ノ對案モナイ。御高教ヲ仰グ次第デス。

I. *linear translatable operator, one-parameter group* ニ關シテ

Λf ヲ與ヘタトキ，n が正ノ整数ナラバ，$\Lambda^n f$ ハ一意的ニ定義サレタ。コレヲ拡張シテ任意ノ実数 s ニツイテ、$\Lambda^s f$ ヲ一意的ニ定義シエナイカ。ソレが確立サレタ暁ニハ $\{\Lambda^s f\}$ ハ s ニ關シテ one-parameter group ヲツクル。

空想ハ先キヲ行ク。Operator $\Gamma^s f$ が定義サレタラ母函数ハ次ノ式デ與ヘラレハシマイカ。

$$\Gamma^s e^{\lambda x} = G(\lambda)^s e^{\lambda x}$$

ケレドモ、一般ニハ多價函数トナル $G(\lambda)^s$ ノ如何ナル branch ヲトルベキカ，顧ルト空漠デアル。

問題ヲ Laplace-Integral ニ変形シテ云ヘバ次ノヤウニナル。

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} d\varphi(t) \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} d\psi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{\lambda t} dg(t)$$

ト

$$g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t-u)\, d\psi(u)$$

トハ equivalent デアル。ダカラ今、有界変分ノ函数ノ family $\{\varphi_s(t)\}$ が與ヘラレテ

(i) $\varphi_{a+b}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_a(t-u)\, d\varphi_b(u)$

が任意ノ a, b ニ對シテ成立スル。

(ii) $\varphi_1(t)$ が與ヘラレタ $\varphi(t)$ ト一致スル。

(i), (ii) ノ性質ヲモテバ，Λf ヲ含ム One-parameter group ガ存在スルコトニナル：

$$\Lambda^s f(x)=\int_{-\infty}^{\infty} f(x+t)\,d\varphi_s(t)$$

シカシ，問題ノ変形ハ，今ノ場合解決ヲ容易ナラシメハシナイデアラウ。$\{\varphi_s(t)\}$ ト $\{G(\lambda)^s\}$ トノ間ニハ

$$\varphi_s(t)=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} G(-iy)^s\,\frac{e^{ity}-1}{y}\,dy$$

ナル関係ガアル。$G(\lambda)^s$ ニ伴フ多價性ハ，又 $\varphi_s(t)$ ニ影響シテ来ルデアラウ。若シ，$G(-iy)$ ガ y ノ函數トシテ，例ヘバ常ニ負ニナラヌ實數値ヲトルトスレバ，任意ノ實數 s ニ對シテ $G(-iy)^s$ ハ負ニナラヌ實数トシテ一意ニキマリ $\varphi_s(t)$ ガ一意ニ決定スル。ケレドモ，斯ル結果本位ノ方針ハ將來伴ヒ起ルベキ諸問題ヲ解決スル力ヲ有シ得ルトモ思ハレナイ。多價性ヲ如何ニ解スベキカ，問題ハ残ル。

II. 線形可遷作用子ノ Factorisation ノ問題

Linear translat. Operator ノ Factorisation ハ，如何ナル linear translat. operator ヲ，irred. ト見做スカニ依ッテ問題ノ局面ガ一変スル。コノ問題ハ，換言スレバ母函数 $G(\lambda)$ ノ Factorisation ニ外ナラナイ。

如何ナル目的カ知ラナイガ，Ritt ハ嘗ッテ exponential sum

$$1+a_1e^{\alpha_1\lambda}+a_2e^{\alpha_2\lambda}+\cdots\cdots+a_ne^{\alpha_n\lambda}$$

ノ Factorisation ヲ論ジタ。(Transact. American Math. S. 29) コノ意圖ヲ、續行シテ一般ノ函數ニ及ブコトニハ、多大ノ暗礁ヲ見ル。今、何ノ結果モ得テヰナイ。事ノ易キニ就イテ $G(\lambda)$ ノ分解ヲ極度ニ擴張シ續ケテ了ヘバ、ソレハ $G(\lambda)$ ヲ函數論デ行フ canonical products デ表現スルコトデアル。コノ立場ニ相當スルモノ、ソレハ Linear transf. operator ヲ無限次ノ微分形式ニ直スコトデアル:

$$\int_{a-0}^{b+0}f(x+t)\,d\varphi(t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{f^{(n)}(x)}{n!}\int_{a-0}^{b+0}t^n\,d\varphi(t)$$

コノ方法ノ實行ニハ、多クノ制限ガ收斂ヲ保証スルタメニ必要ニナッテクル。

III. ϕ-polynomials ニ於イテ、定義ノ式ニ $g(\lambda)$ ガ入ッテ來タ。吾々ハ $g(\lambda)=0$ ノ場合シカ考ヘテ來ナカッタケレドモ $g(\lambda)$ ニ對シテ、明確ナ意味ヲ與ヘルコトハ、operational calculus ニ殘サレターツノ問題デアロウト思フ。或ハ既ニ解決ズミデアルカモ知レナイ。御存知ノ御方ニハ是非教ヘテ戴キタイト思ヒマス。

9. Euler-Maclaurin ノ定理ノ擴張ニハ

$$J=\Gamma_\xi\left\{\int_0^{\xi-x}B_n(x+\eta)f^{(n+1)}(\xi+X-\eta)\,d\eta\right\}$$

コレニ對シテ部分積分法ヲ$\int_0^{\xi-x}$ニ關シテ施シテ

$$\mathrm{J} = B_n(x)\,\Gamma_\xi\left\{f^{(n)}(\xi+\mathrm{X})\right\}$$

$$+\Gamma_\xi\left\{\int_0^{\xi-x} B_{n-1}(x+\eta)\,f^{(n)}(\xi+\mathrm{X}-\eta)\,d\eta\right\} \quad (n \geqq 1)$$

ナル漸化式ヲ得ル、コレカラ

$$f(\mathrm{X}+x) = \sum_{k=0}^{n} B_k(x)\,\Gamma_\xi\left\{f^{(k)}(\xi+\mathrm{X})\right\}$$

$$-\Gamma_\xi\left\{\int_0^{\xi-x} B_n(x+\eta)\,f^{(n+1)}(\xi+\mathrm{X}-\eta)\,d\eta\right\}$$

コレ Euler-Maclaurin ノ定理ニ外ナラナイ。

——（續ク）——